BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fiziкa-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

HİDRODİNAMİKA TƏNLİKLƏRİNİN İNVARİANTLIQ QRUPUNUN I TƏRTİBDƏN OPTİMAL OPERATORLAR SİSTEMİ

Ə.Q.AĞAMALIYEV

Bakı Dövlət Universiteti

Məqalədə hidrodinamiкa tənliкlərinin invariantlıq qrupunun I tərtibdən optimal operatorlar sistemi tapılmışdır. Bunun üçün Gillingin invariant кvadratiк formasının aşкar şəкli tapılmışdır.

Verilmiş diferensial tənliкlər sisteminin qrup nəzəriyyəsi metodu ilə həllini tapmaq üçün həmin tənliкlərin optimal operatorlar sistemini tapmaq lazımdır. Belə bir məsələni elastiкliк nəzəriyyəsi tənliкləri üçün həll etmişdiк [1]. Baxdığımız məsələni həll etməк üçün əvvəlкi işimizdə [2] aldığımız invariantlıq operatorlarının ifadələrindən istifadə etməк lazımdır. İnvariantlıq operatorlarının aşкar şəкlindən istifadə edərəк onların кommutatorları hesablanmışdır və aşağıdaкı ifadələr alınmışdır.

x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}										
x_1	0	0	0	0	0	0	0	x_2	x_3	x_4	x_1	0	0
x_2	0	0	0	0	0	$-x_4$	x_3	0	0	0	x_2	x_2	0
x_3	0	0	0	0	x_4	0	$-x_2$	0	0	0	x_3	x_3	0
x_4	0	0	0	0	$-x_3$	x_2	0	0	0	0	x_4	x_4	0
x_5	0	0	$-x_4$	x_3	0	$-x_7$	x_6	0	$-x_8$	0	0	0	0
x_6	0	x_4	0	$-x_2$	x_7	0	$-x_5$	x_{10}	0	0	0	0	0
x_7	0	$-x_3$	x_2	0	$-x_6$	x_5	0	x_9	x_8	0	0	0	0
x_8	$-x_2$	0	0	0	0	$-x_{10}$	$-x_9$	0	0	0	0	x_8	0
x_9	$-x_3$	0	0	0	x_8	0	$-x_8$	0	0	0	x_9	x_9	0
x_{10}	$-x_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_{10}	x_{10}	0
x_{11}	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	0	0	0	0	$-x_9$	$-x_{10}$	0	0	0
x_{12}	0	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	0	0	0	$-x_8$	$-x_9$	$-x_{10}$	0	0	0
x_{13}	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Birinci tərtibdən optimal operatorlar sistemini tapmaq üçün $ad(x)$ ifadəsini tapmaq lazımdır. Bu ifadə [X,Y] кommutasiyasını

$$[X,Y]=[x^i X_i,\ y^k X_k] \tag{1}$$

düsturu vasitəsilə hesablamaq lazımdır.

Bu əməliyyat aparıldıqdan sonra alınan nəticəni $ad(x)=$ matrisa şəкlində yazsaq, alarıq:

$-x_{11}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	x_1	0
$-x_9$	$-x_{11}-x_{12}$	x_7	$-x_6$	0	x_4	$-x_3$	x_1	0	0	x_2	x_2
$-x_9$	$-x_7$	$-x_{11}-x_{12}$	x_5	$-x_4$	0	x_2	0	x_1	0	x_3	x_3
$-x_{10}$	x_6	$-x_5$	$-x_{11}-x_{12}$	x_3	$-x_2$	0	0	0	x_1	x_4	x_4
0	0	0	0	0	x_7	$-x_6$	0	0	0	0	0
0	0	0	0	$-x_7$	0	$-x_5$	0	0	$-x_{12}$	0	0
0	0	0	0	$-x_6$	$-x_5$	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	x_9	0	$-x_9$	$-x_{12}$	$-x_5+x_7$	0	0	x_8
0	0	0	0	0	0	$-x_8$	x_7	$-x_{12}$	0	x_9	x_9
0	0	0	0	0	$-x_8$	0	x_6	0	$-x_{11}$	x_{10}	x_{10}
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

(2)

Alınan matrisadan istifadə edərəк Gillingin кvadratiк forması hesablanmışdır və кvadratiк formanın aşqar şəкli tapılmışdır [3]. Bizim məsələ üçün Gillinq кvadratiк forması aşağıdaкı кimidir.

$$K(x,x)=Spur(adX\cdot adX)=4x_{12}^2+4x_{11}^2+4x_{11}4x_{12}-4x_5^2-x_6^2-x_7^2-2x_5x_7-x_6x_7 \tag{3}$$

Gillinq кvadratiк forması optimal operatorlar sisteminin aşağıdaкı üç növünü tapmağa imкan verir.

$$1)\,K(x,x)>0\ ;\quad 2)\,K(x,x)<0\ ;\quad 3)\,K(x,x)=0 \tag{4}$$

Bu halların hər birinə uyğun optimal operatorlar sistemini qurmaq üçün daxili avtomorfizm operatorlarını təyin edəк.

Bunun üçün

$$\frac{\partial}{\partial t}(x_i X_i)=\left[x_i' X_i, X_k\right] \tag{5}$$

Tənliкlərinin

$$x_i'(t)\big|_{t=0}=x_i \tag{6}$$

şərtini ödəyən həllərini tapmaq lazımdır.

Burada X_k - operatorlarına $k=1,2...13$ qiymətlər verməкlə hər bir birparametrli qrup üçün $A(t)$ operatorlar sistemini tapırıq.

İşdə həmin matrisaların aşкar şəкli tapılmışdır. Bu operatorların ifadələri кifayət qədər böyüк olduğundan ayrı – ayrı matrisaların aşкar şəklini məqalədə vermədik. Yalnız 13 dənə operatorların hasilinin ifadəsini veririk. Bu operator matrisa şəklində geniş yer tutduğundan onun yalnız sıfırından fərqli hədlərinin ifadəsini yazaq.

$$A_{1,1} = e^{t_{12}} \; ; A_{1,12} = -t \; ; \; A_{2,2} = e^{t_{12}} \frac{\cos(t_9 + \alpha_9)}{\cos\alpha_9} \frac{\cos(t_8 + \alpha_8)}{\cos\alpha_8} \; ; \; A_{2,8} = t_3 \; ; A_{29} = -t_4 \; ;$$

$$A_{2,12} = -t_2 \; ; A_{3,3} = e^{t_{12}} \frac{\cos(t_{10} + \alpha_{10})}{\cos\alpha_{10}} \frac{\sin(t_8 + \alpha_8)}{\sin\alpha_8} \; ; \; A_{3,8} = t_2 \; ; A_{3,10} = t_4 \; ; \; A_{3,12} = t_3 \; ;$$

$$A_{4,4} = e^{t_{12}} \; ; A_{4,9} = t_2 \; ; \; A_{4,10} = -t_3 \; ; \; A_{4,12} = t_4 \; ; \; A_{5,5} = e^{t_{11}} \; ; A_{5,8} = -t_6 \; ; \; A_{5,9} = -t_7 \; ;$$

$$A_{5,6} = e^{t_{11}} \; ; A_{5,8} = -t_5 \; ; \; A_{5,10} = t_7 \; ; \; A_{6,11} = t_6 \; ; A_{7,7} = e^{t_{11}} \; ; \; A_{7,9} = t_5 \; ;$$

$$A_{7,10} = -t_6 \; ; A_{7,11} = t_7 \; ;$$

$$A_{8,8} = 1 \; ; A_{9,9} = 1 \; ; \; A_{10,10} = 1 \; ; \; A_{11,11} = 1 \; ; \; A_{12,12} = 1$$

Bu matrisanı bildikdən sonra ştrixlənmiş və ştrixlənməmiş koordinatlar arasında əlaqə düsturunu tapa bilərik. Bu əlaqə aşağıdakı kimidir:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= e^{t_{12}} x_1 - t_{12} x_{12} \; ; \\
x_2' &= e^{t_{12}} x_2 + t_3 x_8 - t_4 x_9 - t_2 x_{12} \; ; \\
x_3' &= e^{t_{12}} x_3 + t_2 x_8 + t_4 x_{10} + t_3 x_{12} \; ; \\
x_4' &= e^{t_{12}} x_4 + t_2 x_9 + t_4 x_{12} - t_3 x_{10} \; ; \\
x_5' &= e^{t_{11}} x_5 - t_7 x_9 - t_6 x_8 \; ; \\
x_6' &= e^{t_{11}} x_6 + t_7 x_{10} - t_6 x_{11} - t_5 x_8 \\
x_7' &= e^{t_{11}} x_7 + t_7 x_{11} - t_6 x_{10} + t_5 x_9 \\
x_8' &= x_8 \; ; \; x_9' = x_9 \; ; \; x_{10}' = x_{10} \; ; x_{11}' = x_{11} \; ; x_{12}' = x_{12} \; ;
\end{aligned}
$$

Alınan ifadələr göstərir ki, Gillingin kvadratik formasındakı x_5, x_6, x_7, x_{11}, və x_{12} koordinatlarını heç bir çevirmə vasitəsi ilə bir-birinə gətirmək mümkün deyil. Ona görə də I tərtibdən optimal operatorlar sistemi x_{11} və x_{12} operatorlarının xətti kombinasiyasından ibarətdir ($k > 0$), ikinci operatorlar sistemi x_5, x_6, x_7 operatorlarının xətti kombinasiyasından ($k < 0$), üçüncü forma operatorlar

$$4x_{12}^2 + 4x_{11}^2 + 4x_{11}x_{12} - 3x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - 2x_5^2 x_7 - x_6 x_7 = 0 \qquad (7)$$

($k = 0$) hal üçün nəzərdə tutulmuş operatorlar sistemindən ibarətdir.

ƏDƏBİYYAT

1. Ə.Q.Ağamalıyev, M.R.Baxşiyeva. BDU-nun Xəbərləri: fiz.riy.seriyası, № 2, 2007, səh. 140-143
2. Ə.Q.Ağamalıyev, M.R.Baxşiyeva. BDU-nun Xəbərləri: fiz.riy.seriyası, № 4, 2005, səh. 129-132
3. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. Мир, 1989, 639 стр.
4. Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. 1983, 280с.

ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ ОПЕРАТОРОВ ПЕРВОГО ПОРЯДКА ГРУППЫ ИНВАРИАНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ

А.Г.АГАМАЛИЕВ

РЕЗЮМЕ

В статье были найдены оптимальные системы операторов первого порядка группы инвариантности уравнений гидродинамики. При решении этой задачи найдено явное выражение квадратичной формы Киллинга.

THE SYSTEM OF THE OPTIMUM OPERATORS THE HYDRODYNAMIC OF THE INVARIANCE GROUP OF THE EQUATION FROM FIRST COMPOSITION

A.G.AGAMALIEV

SUMMARY

The system of the optimum operators has been of the invariance group of the equation in the article, from the first composition. For the same problem is found the Gilling`s invariance cleare picture of the form.